I.C.A.R.E. **MATHS 2** (Durée 4 heures)

EXERCICE

Dans le plan rapporté au repère orthonormé (O;i ,j) on considère l'arc Γ défini paramétriquement par : $x = (sht.cht - t)/2$
$y = cht$ $t \in R$

1) Construire Γ ;

2) Déterminer le rayon de courbure en tout point M(t) de Γ et la développée Λ de Γ ;

3) Montrer que Γ admet une développante Θ d'équation $y = \alpha.ch(x/\alpha)$; (*On déterminera* α).

PROBLEME

Rappels et notations

E désigne un espace vectoriel de dimension finie n sur C ; ($n \geq 2$)
L(E) désigne l'ensemble des endomorphismes de E, id l'application identité de E dans E, o la composition des applications.

$\forall\ u \in L(E)$ on note $u^0 = id$ et
$\forall\ p \in \mathbf{N}^*$, $u^p = u \circ u \circ \ldots\ldots \circ u$ (p facteurs) ;

u est dit nilpotent s'il existe un entier p tel que $u^p = 0$.

$M_n(C)$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coéfficients dans C ; I_n est la matrice identité d'ordre n.

$M = (m_{i,j})_{(i,j) \in \{1,2,\ldots,n\}^2}$ est la matrice de $M_n(C)$ dont le coéfficient de la $i$ème ligne et de la $j$ème colonne est $m_{i,j}$; ${}^tM$ est sa transposée, Com(M) sa comatrice, det(M) son déterminant, $Tr(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$, sa trace.

On rappelle que :

$$\forall\ M \in M_n(C),\ {}^tCom(M).M = M.{}^tCom(M) = det(M).I_n$$

M est dite nilpotente s'il existe un entier p tel que $M^p = O$.

$\forall (i,j) \in \{1,2,.....,n\}^2$ on note $E_{i,j}$ la matrice de $M_n(C)$ dont le coéfficient de la $k$ième ligne et de la ℓ ième colonne est $\delta_{i,k}.\delta_{j,\ell}$
($\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$, 0 sinon)

Si $u \in L(E)$ a pour matrice M dans la base B de E, on note $P_u(X) = \det(XI_n - M)$ son polynôme caractéristique ; On admettra que $P_u(u) = 0$, ainsi que $P_u(M) = O$; (Théorème de Cayley-Hamilton).

Partie 1

1) Montrer que $M \to Tr(M)$ est une forme linéaire sur $M_n(C)$.

2)
a) Montrer que $\forall (M,N) \in [M_n(C)]^2$, $Tr(MN) = Tr(NM)$.
b) On pose :

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculer Tr(MNP) et Tr (MPN). Que peut on conclure ?

3)
a) Soit $u \in L(E)$, M sa matrice dans une base de E ; on pose :

$$Tr(u) = Tr(M)$$

Justifier cette définition.

b) Montrer que Tr(u) est la somme des valeurs propres de u comptées avec leurs multiplicités.

4) Soit φ une forme linéaire definie sur $M_n(C)$.

a) Soit $F = (f_{i,j})_{(i,j) \in \{1,2,...,n\}^2}$ une matrice quelconque de $M_n(C)$;

Montrer que : $\forall (i,j) \in \{1,2,.....,n\}^2 \quad Tr(FE_{i,j}) = f_{j,i}$

b) En déduire qu'il existe une unique matrice F de $M_n(C)$ telle que : $\forall M \in M_n(C),\ \varphi(M) = Tr(FM)$

5) On suppose que φ vérifie :

$$\forall M \in M_n(C), \forall N \in M_n(C)\quad \varphi(MN) = \varphi(NM)$$

a) Pour $(i,j,k,l) \in \{1,2,...,n\}^4$, déterminer $E_{i,j}.E_{k,l}$.

b) Montrer que :

$$\forall (i,j) \in \{1,2,.....,n\}^2 \quad f_{j,i} = 0 \quad \text{si } i \neq j$$
$$\text{et} \qquad f_{i,i} = f_{j,j}$$

où $F = (f_{i,j})_{(i,j)\in\{1,2,...,n\}^2}$ désigne la matrice associée à φ.

c) En déduire qu'il existe un unique $\alpha \in C$ tel que :

$$\forall M \in M_n(C),\quad \varphi(M) = \alpha Tr(M)$$

Partie 2

1) On considère n applications V_i, $i=1,2,.....,n$ dérivables sur R à valeurs dans C^n, et B la base canonique de C^n.

Soit $\Phi: t \to \det_B(V_1(t), V_2(t), ..., V_n(t))$

Montrer que Φ est une application dérivable de R dans C et que :

$$\forall t \in R,\ \Phi'(t) = \sum_{j=1}^{n} \det_B(W_{j,1}(t), W_{j,2}(t), ..., W_{j,n}(t))$$

où $\forall (i,j) \in \{1,2,.....,n\}^2\ \forall t \in R,\ W_{j,i}(t) = V_i(t)$ si $i \neq j$
et $W_{j,j}(t) = V'_j(t)$.

2) Soit $A \in M_n(C)$, soit $P(X) = X^n + a_1X^{n-1} + ... + a_{n-1}X + a_n$ son polynôme caractéristique.

On pose $\forall x \in C \quad C(x) = {}^tCom(xI_n - A)$

a) Prouver qu'il existe des matrices C_j, $j = 0,1,2,\ldots,n-1$ de $M_n(C)$ telles que :

$$\forall x \in C \quad C(x) = C_0 + xC_1 + x^2C_2 + \ldots + x^{n-1}C_{n-1}$$

et déterminer C_j, pour $j = 0,1,2,\ldots,n-1$

b) Montrer que $\forall x \in C$, $P'(x) = Tr(C(x))$

c) En déduire

$\forall j \in \{1,2,\ldots,n-2\}$, $Tr(C_j) = (j+1)\, a_{n-j-1}$ et $Tr(C_{n-1}) = n$

3)

a) On suppose que A est nilpotente; montrer que $\forall\, k \in \{1,2,\ldots,n\}$ $Tr(A^k) = 0$

b) Réciproquement, on suppose que $\forall\, k \in \{1,2,\ldots,n\}$, $Tr(A^k) = 0$. Déterminer le polynôme caractéristique de A. En déduire que A est nilpotente.

Partie 3

Soit $u \in L(E)$. On désigne par λ_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, les valeurs propres de u, par α_i, $i = 1, 2\ldots, p$, leurs ordres de multiplicité respectifs.
On note par ailleurs $V_i = Ker(u - \lambda_i\, id)$

$$N_i = Ker(u - \lambda_i\, id)^{\alpha_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, p$$

$B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ étant une base de E, on note $u_{i,j}$ l'élément de L(E) dont la matrice dans la base B est $E_{i,j}$, $(i,j) \in \{1,2,\ldots,n\}^2$.
$M = (m_{i,j})\ (i,j) \in \{1,2,\ldots,n\}^2$ désigne la matrice de u dans la base B.
On note Γ_u :

$$\begin{array}{ccc} L(E) & \to & L(E) \\ v & \to & vou - uov \end{array}$$

1) a) Montrer que $\Gamma u \in L(L(E))$

b) Montrer que $\forall (i,j) \in \{1,2,...,n\}^2$:

$$\Gamma_u(u_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} m_{ki} u_{kj} - \sum_{k=1}^{n} m_{jk} u_{ik}$$

c) En déduire $Tr(\Gamma u)$

2)

a) Montrer que $Vect(id,u,u^2,...,u^{n-1})$, le sous espace vectoriel de L(E) engendré par les vecteurs u^k, $k \in \{0,1,2,...,n-1\}$, est inclus dans $Ker(\Gamma u)$ et que $\dim(Ker(\Gamma u)) \geq 2$.

b) Montrer que si $v \in Ker(\Gamma u)$, alors $\forall i \in \{1,2,.....,p\}$, $v(V_i) \subseteq V_i$

3) Dans cette question on suppose u diagonalisable.

a) Montrer que $Ker(\Gamma u) = \{v \in L(E) / \forall i \in \{1,2,.....,p\}, v(V_i) \subseteq V_i\}$

b) En déduire que $Ker(\Gamma u)$ est isomorphe à $L(V_1) \times L(V_2) \times ... \times L(V_p)$, et donner la dimension de $Ker(\Gamma u)$.

4) Dans cette question , on suppose que $P_u(X)$ n'a que des racines simples .

a) Montrer que si Q(X) est un polynôme tel que Q(u) = 0 , alors toute valeur propre de u est racine de Q(X).

b) En déduire que $Ker(\Gamma u) = Vect(id,u,u^2,..., u^{n-1})$.

5) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $v \in L(E)$

a) Calculer $(\Gamma u)^k(v)$

b) En déduire que si u est nilpotent, Γu est nilpotent.

6) a) Montrer que si $v \in Ker(\Gamma u)$ alors $\forall i \in \{1,2,.....,p\}$, $v(N_i) \subseteq N_i$.

Dans la suite de la question on utilisera le fait que $E = \oplus N_i$, $i = 1,2,..., p$

b) Montrer qu'il existe $\delta \in L(E)$ diagonalisable et $\omega \in L(E)$ nilpotent tels que : $u = \delta + \omega$, $\delta \circ \omega = \omega \circ \delta$, et $Ker(\Gamma u) = Ker(\Gamma \delta) \cap Ker(\Gamma \omega)$